
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Φυλλάδιο 7

1 Σφαίρα

Άσκηση 1.1 Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z + 9 = 0$ παριστάνει σφαίρα της οποίας να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Άσκηση 1.2 Δίνονται τα σημεία $A(5, 2, -1)$ και $B(-3, 4, 7)$. Να βρείτε τη σφαίρα με διάμετρο το τμήμα AB .

Άσκηση 1.3 Να δείξετε ότι οι εξισώσεις

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 20 = 0, \\ z = 2, \end{cases}$$

ορίζουν κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Άσκηση 1.4 Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 34, \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 25. \end{cases}$$

Άσκηση 1.5 Δίνονται τα σημεία $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(1/2, 0, 1/2)$, $E(1, 2, 3)$. Στην περίπτωση που οι τετράδες $\{A, B, C, D\}$ και $\{A, B, C, E\}$ ορίζουν σφαίρα, να βρεθεί αυτή.

Άσκηση 1.6 Μια σφαίρα έχει κέντρο το σημείο $K(3, 1, 5)$ και εφάπτεται του επιπέδου με αναλυτική εξίσωση $2x - y + 2z + 3 = 0$. Βρείτε την εξίσωση της σφαίρας.

Άσκηση 1.7 Μια σφαίρα διέρχεται από το σημείο $A(8, 15, 10)$ και τέμνει το Oxy επίπεδο σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας $R = 7$. Βρείτε την εξίσωση της σφαίρας.

Άσκηση 1.8 Να βρεθεί σφαίρα ομόκεντρη της $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 8z = 5$ και εφαπτόμενη του επιπέδου με αναλυτική εξίσωση $4x + 3y = 11$.

Άσκηση 1.9 Δίνεται σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 8z - 21 = 0$ και η ευθεία με διανυσματική εξίσωση $\vec{x} = (2, 3, 2) + t(1, 0, -1)$. Να βρείτε τα σημεία τομής αυτών καθώς και τα εφαπτόμενα επίπεδα της σφαίρας σε αυτά τα σημεία.

Άσκηση 1.10 Βρείτε την εξίσωση της σφαίρας που διέρχεται από το σημείο $A(4, 3, 3)$ και τον κύκλο

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z - 30 = 0, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Άσκηση 1.11 Βρείτε την εξίσωση της σφαίρας που διέρχεται από το σημείο $A(1, 1, 1)$ και τον κύκλο

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - x + y - z - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Άσκηση 1.12 Ένα τρίγωνο έχει κορυφές τα σημεία $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 3, 4)$. Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου.